

第三章 导数与微分

1. 单项选择题:

(1) 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续是 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导的 ().

- A. 必要但非充分条件 B. 充分但非必要条件
C. 充要条件 D. 既非充分又非必要条件

(2) 设曲线 $y = x^2 - x$ 上点 M 处的切线的斜率为 1, 则点 M 的坐标为 ().

- A. (0,1) B. (1,0) C. (1,1) D. (0,0)

(3) 已知 $f(x) = \ln x^2 + e^{2x}$, 则 $f'(1) = ()$.

- A. 0 B. e^2 C. $2 + 2e^2$ D. $2e^2$

(4) 设 $\begin{cases} x = \frac{1}{1+t}, \\ y = \ln(1+t), \end{cases}$ 则 $\frac{dy}{dx} = ()$.

- A. $\frac{1}{1+t}$ B. $-\frac{1}{1+t}$ C. $1+t$ D. $-(1+t)$

(5) 设 $e^y = 2xy$, 则 $y' = ()$.

- A. $-\frac{2y}{e^y + 2x}$ B. $-\frac{2y}{e^y - 2x}$ C. $\frac{2y}{e^y - 2x}$ D. $\frac{2y}{e^y + 2x}$

(6) 设 $y^2 + x^2 = 3xy$ 在点 (1,1) 的导数等于 ().

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

(7) 已知 $f(x) = ax^2$ 且 $f'(x) = 8x$, 则 a 的值为 ().

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

(8) 若 $f(x) = x + 2e^x$, 则 $f'(0) = ()$.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

(9) 下列等式中, 错误的是 ().

- A. $\sin x dx = d(\cos x)$ B. $x dx = \frac{1}{2} d(x^2)$ C. $dx = d(x+1)$ D. $e^x dx = d(e^x)$

(10) 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 其二阶导数为 ().

- A. $-\cos x + \sin x$ B. $\cos x + \sin x$ C. $-\cos x - \sin x$ D. $\cos x - \sin x$

2. 填空题:

(1) 设 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$ _____.

(2) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x^2, & x < 0, \end{cases}$ 则 $f'(0) =$ _____.

(3) 已知 $f(x) = 2ax + \cos 2x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线斜率为 2, 则 $a =$ _____.

(4) 求 $f(x) = e^{2x}$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 _____.

(5) 已知 $y = x^2 \cos x$, 求 $\frac{dy}{dx} =$ _____.

(6) 已知 $y = \frac{\ln x}{2x}$, 求 $\frac{dy}{dx} =$ _____.

(7) 已知 $y = (1+x)e^x$, 求 $\frac{dy}{dx} =$ _____.

(8) 已知 $y = x\sqrt{1+x^2}$, 求 $\frac{dy}{dx} =$ _____.

(9) 设 $y = \log_5 x + 5^x$, 则 $y' =$ _____.

(10) 设 $y = e^x \sin x$, 则 $y' =$ _____.

(11) 已知 $y = e^{2x}$, 则 $y^{(n)} =$ _____.

(12) 已知 $y = \sin x^3$, 求 $\frac{dy}{dx} =$ _____.

(13) 已知 $y = \ln \sin e^x$, 求 $\frac{dy}{dx} =$ _____.

(14) 已知 $y = e^{\cos \frac{1}{x}}$, 求 $\frac{dy}{dx} =$ _____.

(15) 已知 $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 求 $\frac{dy}{dx} =$ _____.

(16) 已知 $y = \frac{\cos 2x}{x}$, 求 $\frac{dy}{dx} =$ _____.

(17) 设 $y = (\arccos x)^2$, 则 $y' =$ _____.

(18) 设 $y = \sqrt{1 + \ln^2 x}$, 则 $y'|_{x=e} =$ _____.

(19) 已知 $\cos(x^2 + y^2) + e^x - x^2 y = 0$, 求 $\frac{dy}{dx} =$ _____.

(20)已知 $1 + \sin(x+y) = e^{xy}$, 求曲线 $y = y(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程_____.

(21)已知 $y = x^{\sin x} (x > 0)$, 求 $\frac{dy}{dx} =$ _____.

(22)设 $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$, 求 $y''' =$ _____; $y^{(4)} =$ _____.

(23)设 $y = \sqrt{x}(x^2 - \sqrt{x})$, 求 $y'' =$ _____.

(24)设 $y = e^{x^2}$, 求 $y'' =$ _____.

(25)设 $y = x \sin x$, 求 $y'' =$ _____.

(26)设 $y = x \ln x$, 求 $y'' =$ _____.

(27)设 $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$, 求 $dy =$ _____.

(28)设 $y = [\ln(1-x)]^2$, 求 $dy =$ _____.

(29)设 $y = x^{\cos x} (x > 0)$, 求 $dy =$ _____.

(30)设 $f'(x_0) = 1$, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$ _____.

(31)参数方程 $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 2t^2, \end{cases}$ 所确定的函数的导数 $\frac{dy}{dx} =$ _____.

(32)已知 $f(x) = x^3 - \sin x$, 则 $f'(x) =$ _____, $f'''(x) =$ _____.

(33)曲线 $y = x^2$ 在点 $(1,1)$ 处的二阶导数是_____.

3. 判断题:

(1)若 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 则 $f'(x_0)$ 一定存在. ()

(2)若 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则它在 x_0 处连续. ()

(3)若 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 则它在 x_0 处可导. ()

(4) $(x^2 \sin x)' = 2x \cos x$. ()

(5) $\frac{d(e^{x^2})}{dx} = (e^{x^2})'(x^2)'$. ()

$$(6) (\arctan \sqrt{x})' = \frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}. \quad (\quad)$$

$$(7) (e^{2x})' = e^{2x}. \quad (\quad)$$

$$(8) (e^{2x})'' = e^{2x}. \quad (\quad)$$

$$(9) \text{函数 } f(x) \text{ 在点 } x \text{ 可微} \Leftrightarrow f(x) \text{ 在点 } x \text{ 可导}. \quad (\quad)$$

$$(10) \text{若函数 } f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 可微, 则 } f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 连续}. \quad (\quad)$$

$$(11) \text{若 } u(x), v(x) \text{ 均为可导函数, 则 } [u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \quad (\quad)$$

$$(12) \text{若 } y = 4x^3 + \ln 3, \text{ 则 } y' = 12x^2 + \frac{1}{3}. \quad (\quad)$$

4. 求曲线 $y = 2^x$ 在点(0,1)处的切线方程和法线方程.

5. 求曲线 $y = x - \ln x$ 在点(1,1)处的切线方程.

6. 已知 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 且 $f'(x_0) = A$, 求:

$$(1) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) + f(x_0)}{\Delta x};$$

$$(2) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

7. 求下列函数的导数:

$$(1) y = 2x^2 - \frac{1}{x^2} + 2x + 3;$$

$$(2) y = x^2 \cos x;$$

$$(3) y = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{\pi}{2};$$

$$(4) y = \frac{1}{x + \sin x};$$

$$(5) y = (x - \frac{1}{x})(x^2 - \frac{1}{x^2});$$

$$(6) y = \arcsin x + \arccos x;$$

$$(7) y = \frac{x \tan x}{2 + x^2};$$

$$(8) y = \frac{2^x - 1}{2^x + 1};$$

$$(9) y = e^x (\cos x - 2 \sin x);$$

$$(10) y = \frac{x + 2}{2x - 1};$$

$$(11) y = 2 \sec x + 2\sqrt{x} \arctan x;$$

$$(12) y = \sin x \cos x.$$

8. 求下列函数的导数:

$$(1) y = \cos 2x;$$

$$(2) y = e^{-2x};$$

$$(3) y = \frac{1}{x} \sin^2 x;$$

$$(4) y = (2 \cos x + x)^3;$$

$$(5) y = \ln \sqrt{1-2x};$$

$$(7) y = \arctan \sqrt{x};$$

$$(9) y = (4 + \log_4 x)^4;$$

$$(11) y = (x^3 - 1)^3;$$

$$(13) y = \ln(\ln(\ln x));$$

$$(15) y = (\cos \sqrt{1-2x})^2;$$

$$(17) y = \left(\arcsin \frac{1}{x}\right)^2;$$

$$(19) y = \ln(2 + \sqrt{x^2 - 2});$$

$$(6) y = (\sqrt{x} - x)^3;$$

$$(8) y = 2^{\tan^2 x};$$

$$(10) y = xe^{\cos x};$$

$$(12) y = \sqrt{x + \sqrt{x}};$$

$$(14) y = (\sin x + \cos x)^2;$$

$$(16) y = 2^{\sqrt{x}};$$

$$(18) y = \arccos(\sin x^2);$$

$$(20) y = \sin^2 x \cos^2 x.$$

9. 求下列参数方程所确定的函数的导数 $\frac{dy}{dx}$:

$$(1) \begin{cases} x = te^t, \\ y = e^t; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \arcsin t. \end{cases}$$

10. 求下列函数的微分:

$$(1) y = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1}};$$

$$(2) y = e^{-x} \sin(3-x);$$

$$(3) y = e^{-\tan 2x};$$

$$(4) y = 2^{\sin \frac{1}{x}};$$

$$(5) y = x^3 + \cos 3x;$$

$$(6) y = e^x \cos x;$$

$$(7) y = \arccos e^{2x};$$

$$(8) y = e^{2x} \sin 2x;$$